

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Tripletul $(0, 1, 0)$ e soluție a sistemului, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, deci acesta este compatibil.

Dacă $a + b + c \neq 0$ și $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$, atunci soluția precedentă este unică.

c) Din ipoteză rezultă că $a = b = c$.

$$\text{Cum } a = b = c \neq 0, \text{ rezultă } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x - y \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

A doua ecuație din sistem are o infinitate de soluții, care sunt coordonatele punctelor de pe cercul de centru

$$Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ și rază } r = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Soluțiile sistemului sunt } \begin{cases} x_t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos t \\ y_t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin t \\ z_t = 1 - x_t - y_t \end{cases}, \text{ cu } t \in [0, 2\pi).$$

2. a) Deoarece a, b, c pot lua arbitrar câte 4 valori, există $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ matrice în mulțimea G .

b) De exemplu, matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ are proprietățile cerute.

$$\text{c) Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G. \quad X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \hat{1} \\ b(a+c) = \hat{0} \\ c^2 = \hat{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{\hat{1}, \hat{3}\} \\ c \in \{\hat{0}, \hat{2}\} \end{cases}, \text{ deci } a+c \in \{\hat{1}, \hat{3}\}.$$

Rezultă $b = \hat{0}$. Obținem patru matrice.